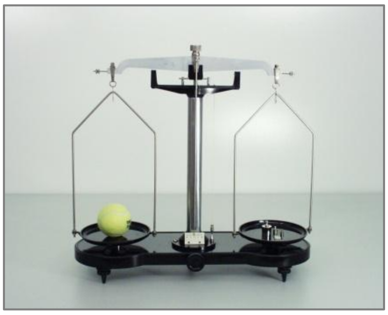
A testek egyensúlya

A faágon függő alma, a mindkét oldalán azonos mértékben megterhelt laboratóriumi mérleg karja, a két végén alátámasztott hídszerkezet egyensúlyban van. *Azt az állapotot, melyben a test tartósan nyugalomban van, egyensúlynak nevezzük*. Egy függőlegesen feldobott kavics a pályájának legmagasabb pontján egy pillanatra megáll, sebessége nulla, ez az állapot azonban tartósan nem marad meg, tehát a kő ilyenkor nincs egyensúlyban.


Az egyensúly azonban nem jelenti azt, hogy a testre nem hat erő. A fán levő almára hat a nehézségi erő, és a faág is húzza. A hídra is több erő hat: a nehézségi erő, az alátámasztások által kifejtett erők és a hídon haladó járművek, gyalogosok súlya is. A mérleg karjára is több erő hat.

Pontszerű test egyensúlyának feltétele

Pontszerű testnél egyszerűen levezethető az egyensúly feltétele. Ha a test egyensúlyban van, akkor sebessége tartósan nulla, ezért gyorsulása is nullvektor ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$). A dinamika alapegyenletéből kiindulva meghatározható a testre ható erők vektori összege:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

tehát

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

Ezek szerint *a pontszerű test akkor lehet egyensúlyban, ha a testre ható erők vektori összege nullvektor.*

Például a fán függő almára két erő hat: a nehézségi erő és az ág által kifejtett tartóerő. Korábban láttuk, hogy a nehézségi erő és a tartóerő azonos nagyságú, de ellentétes irányú. Vektori összegük tehát nullvektor, így a most megfogalmazott feltétel valóban teljesül.

Merev test egyensúlyának feltételei

Ha a merev test egyensúlyban van, akkor a tömegközéppontja sem mozoghat, így *a tömegközéppont gyorsulása nullvektor* ($\boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \mathbf{0}$). A tömegközéppont-tételből kiindulva meghatározható a testre ható erők vektori összege:

$$\Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = m \cdot \boldsymbol{a}_\mathrm{t} = m \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

tehát

$$\Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = \mathbf{0}$$

Tehát *egyensúly esetén a merev testre ható (külső) erők vektori összege nullvektor*.

Merev testeknél a $\Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{k} = \mathbf{0}$ *feltétel teljesülése azonban nem elegendő az egyensúlyhoz.* Ha például az asztalra letett könyvre az látható módon két azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejtünk ki a kezünkkel, akkor a könyv elfordul. Bár a két erő vektori összege nulla, de a két erő forgatóhatására a könyv mégis elfordul, azaz nem marad egyensúlyban.

Az egyensúlyban lévő merev test forgómozgást sem végez, ezért a test *szöggyorsulása nulla* ($\beta = 0$). A forgómozgás alapegyenlete alapján meghatározható a merev testre ható forgatónyomatékok összege:

$$\Sigma M_\mathrm{k} = \Theta \cdot \beta = \Theta \cdot 0 = 0$$

azaz

$$\Sigma M_\mathrm{k} = 0$$

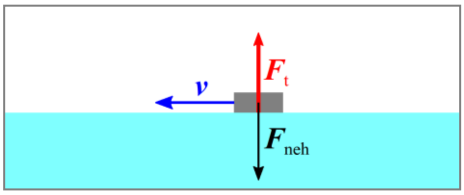
Tehát *egyensúly esetén a merev testre ható (külső) erők forgatónyomatékának összege nulla.*

Merev test egyensúlyánál ezek szerint egyszerre két feltételnek is teljesülnie kell: *A merev test akkor lehet egyensúlyban, ha a testre ható külső erők vektori összege nullvektor, továbbá a testre ható külső erők forgatónyomatékának összege nulla.*

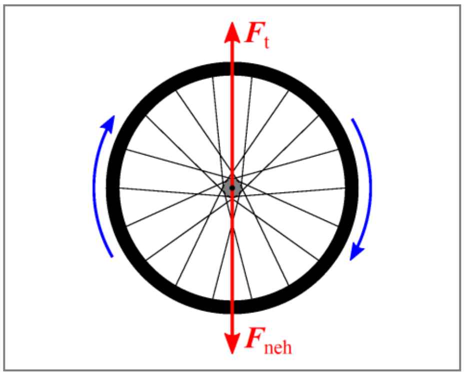
$$\Sigma \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{0}$$

$$\Sigma M_{\mathrm{k}} = 0$$

Ezek a feltételek csak *szükséges feltételei* az egyensúlynak. A jégen csúszó jégkorong nincs egyensúlyban, noha a rá ható nehézségi erő és a tartóerő eredője nullvektor.



Ugyanígy a felfordított kerékpár (gyakorlatilag súrlódás nélkül forgatható) kerekére ható nehézségi erő és a tartóerő vektori összege nullvektor, és e két erő forgatónyomatékának összege is nulla. Ha azonban a kereket megpörgetjük, majd magára hagyjuk, akkor egyenletesen forog, tehát nincs egyensúlyban.



Az egyensúlyra kapott feltételek segítségével gyakran meg lehet határozni olyan erőket, amelyek közvetlenül nem mérhetőek meg.

Kiegészítés

1. A pontszerű test egyensúlyával kapcsolatban Simon *Stevin* (1548–1620) holland fizikus, matematikus fogalmazott meg összefüggést 1587-ben. Ebben kimondta, hogy három erő hatására akkor jön létre egyensúly, ha a három erő vektora zárt háromszöget alkot. Ugyancsak ő fogalmazta meg a lejtőre helyezett test egyensúlyának feltételét is.

2. Az emelők, csigák és más egyszerű gépek egyensúlyának feltételét *Arkhimédész* (i. e. 287–212) görög fizikus és matematikus fogalmazta meg i. e. 250. körül. Ezekkel az eszközökkel az emberi izomerőnél jelentősen nagyobb erőket lehetett létrehozni. Jelentős eredményeket ért el a folyadékokban ható felhajtóerő vizsgálatában is (Arkhimédész törvénye). A matematikában a parabolával, valamint a henger, a kúp és a gömb térfogatának kiszámításával foglalkozott.

Példa

Egy 4 m hosszú 200 kg tömegű gerenda a két végén támaszkodik a falra. A gerendán egy 80 kg tömegű munkás áll az egyik végtől 1 m távolságra. Mekkora tartóerő hat a gerendára a két végpontban?

$M = 200\ \mathrm{kg} \qquad \Longrightarrow \qquad F_{\mathrm{neh}} = M \cdot g = 2000\ \mathrm{N}$

$m = 80\ \mathrm{kg} \qquad \Longrightarrow \qquad G = m \cdot g = 800\ \mathrm{N}$

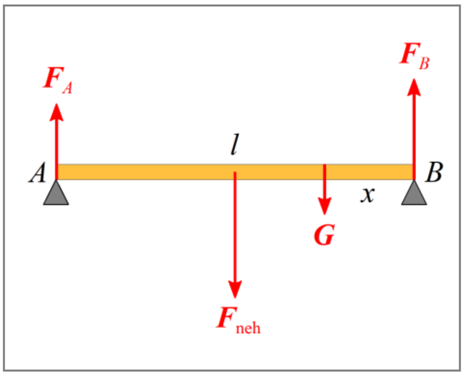
$l = 4\ \mathrm{m}$

$x = 1\ \mathrm{m}$

$F_A = ?$

$F_B = ?$

A gerendára összesen négy erő hat: a nehézségi erő a gerenda közepén, a munkás G nagyságú súlya a gerenda végétől x távolságra, és a gerenda végein a két ismeretlen, F_A, illetve F_B nagyságú tartóerő. A gerenda egyensúlyban van, így a négy erő vektori összege nullvektor. Ennek megfelelően:



$$F_A + F_B - F_{\mathrm{neh}} - G = 0 \tag{1}$$

A forgatónyomatékok összege szintén nulla. Mivel egyensúly esetén tényleges elfordulás nincsen, a forgástengelyt bárhol kijelölhetjük. *Célszerű olyan tengelyt választani, amelyre vonatkozóan valamelyik ismeretlen erő forgatónyomatéka nulla lesz.* Például a B ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengely esetén az F_B átmegy a forgástengelyen, így a forgatónyomatéka nulla. Ennek megfelelően:

$$F_A \cdot l - F_{\mathrm{neh}} \cdot \frac{l}{2} - G \cdot x = 0$$

Ebből az összefüggésből az F_A kifejezhető:

$$F_A \cdot l = F_{\mathrm{neh}} \cdot \frac{l}{2} + G \cdot x \qquad \Big/ : l$$

$$F_A = F_{\mathrm{neh}} \cdot \frac{1}{2} + G \cdot \frac{x}{l}$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$F_A = F_{\text{neh}} \cdot \frac{1}{2} + G \cdot \frac{x}{l} = 2000\ \text{N} \cdot \frac{1}{2} + 800\ \text{N} \cdot \frac{1\ \text{m}}{4\ \text{m}} = 1200\ \text{N}$$

Az F_A ismeretében az (1) összefüggésből az F_B is meghatározható:

$$F_A + F_B - F_{\text{neh}} - G = 0$$

$$F_B = F_{\text{neh}} + G - F_A$$

Behelyettesítés után:

$$F_B = F_{\text{neh}} + G - F_A = 2000\ \text{N} + 800\ \text{N} - 1200\ \text{N} = 1600\ \text{N}$$

A gerendára a munkáshoz közelebbi végén 1600 N, a másik végén pedig 1200 N nagyságú tartóerő hat.

Ugyanezekhez az eredményekhez jutunk akkor is, ha a forgástengelynek például az A ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengelyt választjuk. A forgatónyomatékok összegére felírható egyenlet ebben az esetben:

$$F_B \cdot l - F_{\text{neh}} \cdot \frac{l}{2} - G \cdot (l - x) = 0$$

$$F_B \cdot l = F_{\text{neh}} \cdot \frac{l}{2} + G \cdot (l - x)$$

$$F_B = F_{\text{neh}} \cdot \frac{1}{2} + G \cdot \frac{(l - x)}{l}$$

$$F_B = 2000\ \text{N} \cdot \frac{1}{2} + 800\ \text{N} \cdot \frac{3\ \text{m}}{4\ \text{m}} = 1600\ \text{N}$$

Ebből az (1) összefüggés alapján az F_A is meghatározható

$$F_A + F_B - F_{\text{neh}} - G = 0$$

$$F_A = F_{\text{neh}} + G - F_B$$

Behelyettesítés után:

$$F_A = 2000\ \text{N} + 800\ \text{N} - 1600\ \text{N} = 1200\ \text{N}$$

Az F_A és F_B értékére tehát most is ugyanazokat az értékeket kaptuk, mint az előző megoldásban.

Képek jegyzéke

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.